

Nagyné Kondor Rita

ÖSSZEHASONLÍTÓ GEOMETRIA

BEVEZETÉS

„Az élő, korszerű matematikaoktatás legfontosabb feladata, hogy önálló gondolkozásra, a döntéshelyzetek megismerésére és megoldására nevelje a fiatalokat. Ennek megfelelően, a matematika bármely területén többféle lehetséges rendszert és módszert kell bemutatnunk, diákjainkra hagyva a választás jogát és kötelességét. Az összehasonlító geometria ezt a többszemponútú megközelítést kívánja a matematikában megvalósítani.” – írja Lénárt István. [5]

A hiperbolikus és a gömbi geometria nem csak a felsőfokú képzés keretében érhető el a diákok számára. A Magyarországon folyó összehasonlító-geometriai oktatási kísérletek néhány középiskolai tanórán illetve szakköri foglalkozáson vizsgálták az euklidészi geometriában tanultak érvényességét, a gömbi geometriában és a hiperbolikus geometriában (Lénárt István, Horváth Jenő, Kálmán Attila, ...). [1], [2], [3], [5]

Lénárt István munkalapokat készített a síkgeometria és a gömbi geometria összehasonlításához. [6] A Lénárt István által kifejlesztett, a síkhoz között szemléletmód feloldására hivatott matematikaoktatási módszer a világ számos pontján vívta ki a diákok és az oktatók elismerését. Nincs szükség a középiskolában tanított euklideszi síkgeometriát meghaladó előismeretekre. A könnyebb megértést segíti a tanulók rendelkezésére álló magyar találmányokra épülő taneszköz, a rajzgömb készlet (1. ábra), amivel gömbi geometriai szerkesztéseket lehet elvégezni. A módszer legfontosabb célkiűzései között szerepel a síkgeometria fogalmainak mélyebb megértése a gömbi geometriával történő összehasonlítás segítségével, valamint a megértés és a türelem fejlesztése más gondolkodásmódok iránt, a matematikán belül és a matematikán kívül. [5]



1. ábra. A rajzgömb készlet [5]

A számítógép virtuális valósága nagyszerű lehetőséget biztosít a hiperbolikus sík tanulmányozására. Szilassi Lajos magyar nyelvű, a Poincare-féle körmodell bemutató programja lehetőséget biztosít a hiperbolikus geometriával való ismerkedésre. [10]

NEMEUKLIDESZI GEOMETRIÁK

Euklidész i. e. 300 körül foglalta össze a görög matematika addigi eredményeit, *Elemek* című munkájában. A középiskolában tanított geometria nagy része a mai napig e munkából származik.

A XIX. században Bolyai János – az abszolút geometria kidolgozója - és Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij egy időben dolgozott ki egy geometriai rendszert – a Bolyai-Lobacsevszkij-féle (hiperbolikus) geometriát. A hiperbolikus sík Poincare-féle körmodelljében a síknak egy nyitott körlap (alapkör), az egyeneseknek az alapkört merőlegesen metsző köröknek az alapkör belsejébe eső ívei, illetve az alapkör átmérője felelnek meg. [8]

A gömbi geometria nem abszolút geometria, de a gömb felületén ugyanúgy végezhetünk geometriai vizsgálatokat, szerkesztéseket, mint a síkon. A gömbi (szférikus) geometriában az egyenesnek a gömbi főkörök, a köröknek a többi gömbi kör, szakasznak a félkörnél nem nagyobb főkörív felel meg. Két pont távolságát a hozzájuk vezető sugarak hajlásszögével mérjük. A szög a főkörívek által bezárt szöget jelenti. Az egyszeres elliptikus geometriában két egyenes pontosan egy pontban metszi egymást, de közülük egyik sem különbözi el a sík pontjait két diszjunkt halmazra. A kétszeres elliptikus geometriában két egyenes

pontosan két pontban metszi egymást, és minden egyenes elkülöníti a sík pontjait két diszjunkt halmazra. [3]

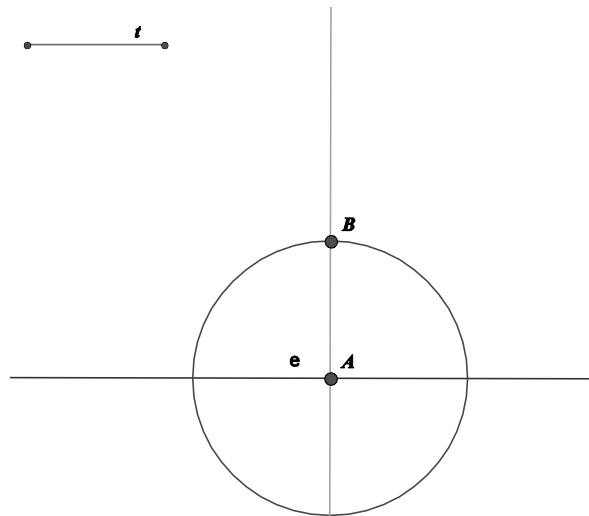
A dinamikus geometriai rendszerek egy része, így a Cinderella program is lehetőséget nyújt a szerkesztések elvégzésére gömbi geometriában (egyszeres elliptikus geometriában) és Poincare-féle körmodellben (hiperbolikus geometriában) is. [4], [9]

MÉRTANI HELYEK KERESÉSE

Az összehasonlító geometria tanítását a Cinderella program hatékonyan támogatja. A mértani hely keresése számítógépes segítség nélkül nehézkes, lassú folyamat, itt lehet igazán a dinamikus geometriai rendszer előnyeit kamatoztatni. Mivel a program a kúpszeleteket felismeri, lehetőséget ad a ponthalmazok megtalálására akkor is, ha nem körről vagy egyenesről van szó. Meg kell adnunk, hogy melyik pont mozogjon, melyik objektumon és ennek hatására a program melyik pont mozgását rajzolja meg. Ha dinamikus ábrát szeretnénk, egy gomb segítségével lehetőségünk van animációk készítésére is.

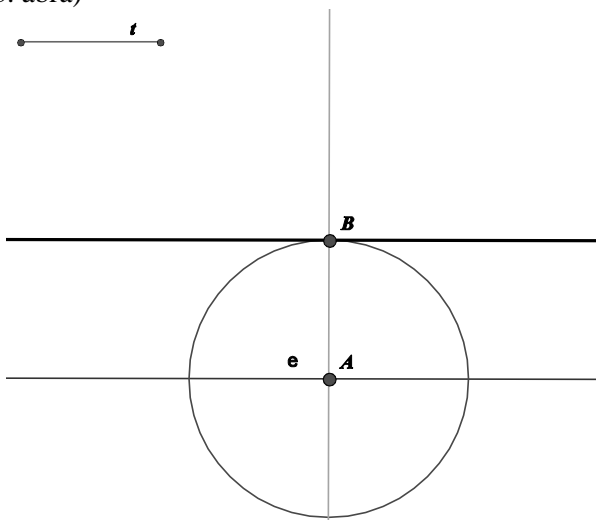
Feladat. Keressük meg az adott e egyenestől adott t távolságra lévő pontok halmazát!

Szerkesszük meg a feladatot mindhárom geometriában!



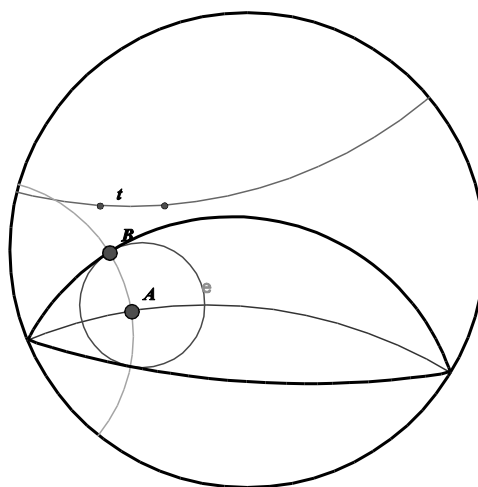
2. ábra. A feladat euklideszi geometriában

Euklideszi geometriában az A pont fusson végig az e egyenesen, így kövessük a B pont útját! (3. ábra)



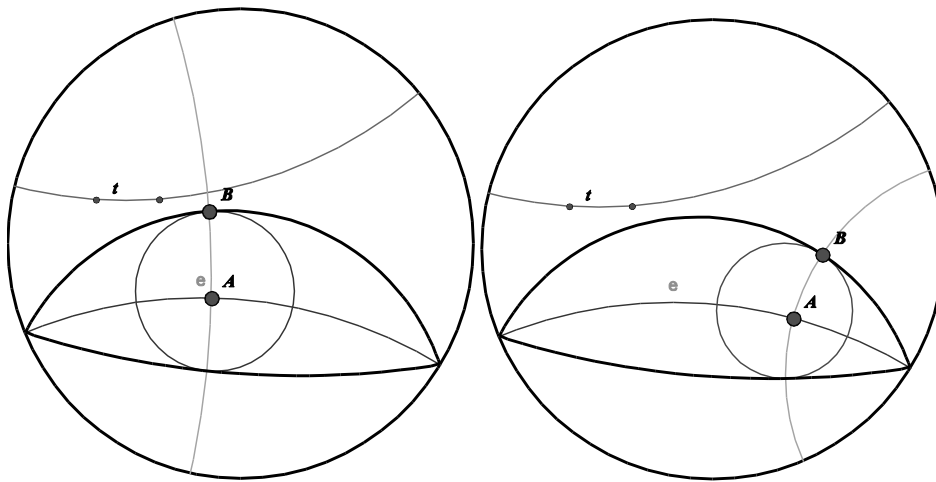
3. ábra. A mértani hely euklideszi geometriában

Most hiperbolikus geometriában oldjuk meg a feladatot! (4. ábra)



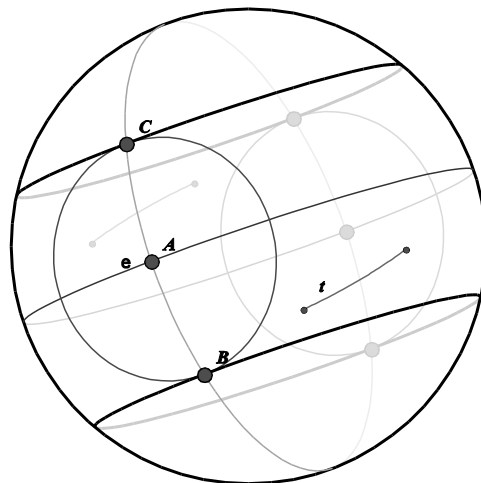
4. ábra. A mértani hely hiperbolikus geometriában

Az A pont mozog az e egyenesen. A pont két helyzetét mozgás közben az egyenesen az 5. ábra mutatja.



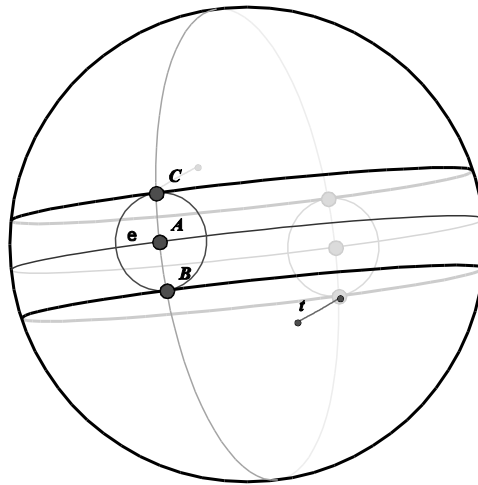
5. ábra. A mértani hely hiperbolikus geometriában

A megoldás elliptikus geometriában: (6. ábra)



6. ábra. A mértani hely elliptikus geometriában

A t távolság utólag történő csökkentésével az ábra dinamikusan változik a feladat feltételeit megtartva: (7. ábra)



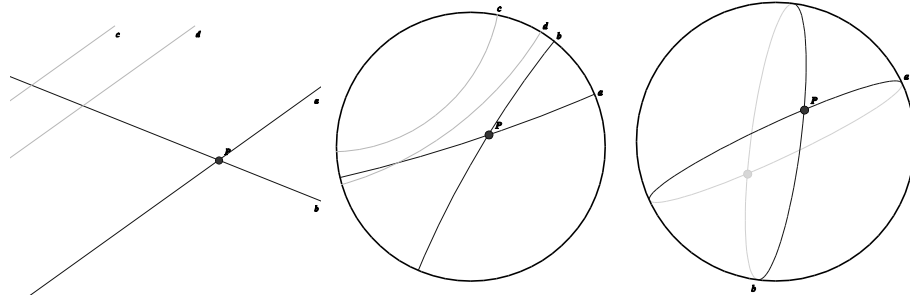
7. ábra. A mértani hely elliptikus geometriában

PÉLDÁK

Hasonlítsunk össze néhány alapvető tételt a három geometriában a Cinderella program segítségével [7]:

1. Példa. Két különböző egyenesnek hány közös pontja lehet? (8. ábra)

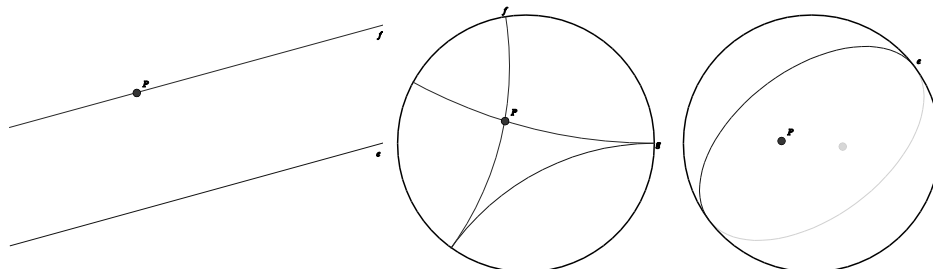
- Az euklideszi geometriában legfeljebb 1.
- A hiperbolikus geometriában legfeljebb 1.
- Az (egyszeres) elliptikus geometriában 1.



8. ábra. Két különböző egyenes közös pontja

2. Példa. Ha adott egy e egyenes és rajta kívül egy P pont, akkor hány egyenes halad át a P -n, amely nem metszi az e -t? (9. ábra)

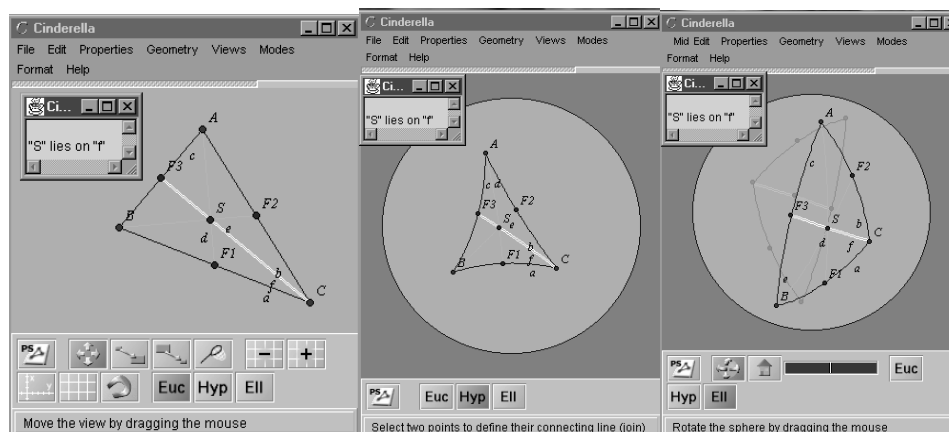
- Az euklideszi geometriában egy és csak egy egyenes.
- A hiperbolikus geometriában legalább két egyenes.
- Az elliptikus geometriában egy egyenes sem.



9. ábra. Adott ponton áthaladó, adott egyenest nem metsző egyenes(ek)

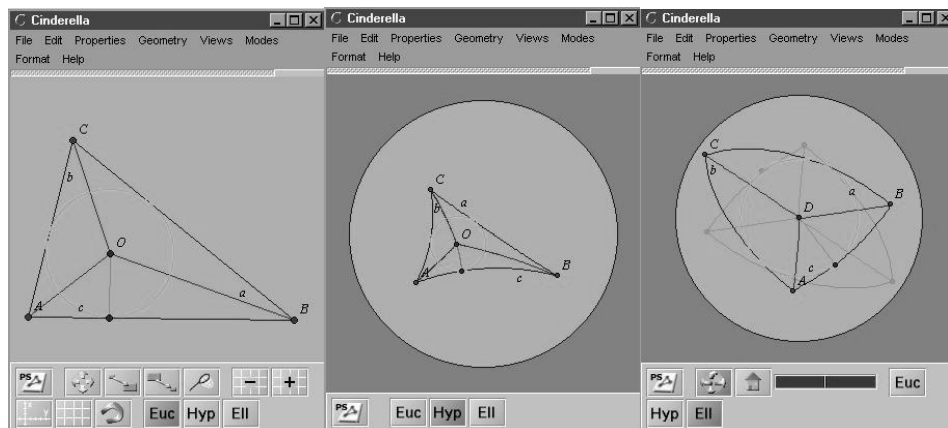
Síkháromszögek, gömbháromszögek és a hiperbolikus síkon levő háromszögek tulajdonságainak összehasonlítása:

3. Példa. A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek át. (10. ábra)



10. ábra. A háromszög súlyvonalai

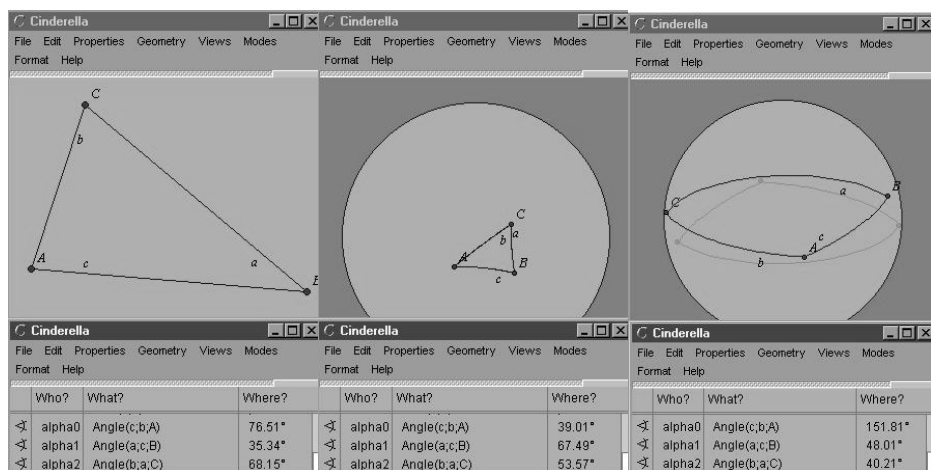
4. Példa. A háromszög belső szögfelezői egy ponton mennek át. Ez a pont a háromszög beírt körének középpontja. (11. ábra)



11. ábra. A háromszög belső szögfelezői

5. Példa. A háromszög belső szögeinek összege. (12. ábra)

- Az euklideszi geometriában 180° .
- Az elliptikus geometriában 180° -nál nagyobb.
- A hiperbolikus geometriában 180° -nál kisebb.



12. ábra. A háromszög belső szögeinek összege

ÖSSZEGZÉS

Az összehasonlító geometria célja a matematika többszemponútú megközelítése. A Magyarországon folyó oktatási kísérletek eredményei bizonyítják, hogy – ha

van rá lehetőség – érdemes a nemeuklideszi geometria elemeit tanítani már a középiskolától kezdve. A hiperbolikus és gömbi geometria oktatása révén a tanulók pontosabb képet kapnak az euklideszi geometria fogalmairól is, fogékonyak lesznek más gondolkodásmódok iránt, hiszen az euklideszi geometria csak egyike a világ lehetséges geometriai leírásainak.

A Cinderella geometriai szerkesztőprogram lehetőséget nyújt a szerkesztések elvégzésére euklideszi geometriában, a hiperbolikus sík Poincare-féle körmodelljében és gömbi geometriában is. Dinamikus geometriai rendszer lévén a példában említett tételt a szerkesztés végén vizsgálhatjuk a bemeneti adatok változtatásával, hiszen a program a szerkesztés lépéseit a változtatások után is következetesen végrehajtja. Tehát a programmal hatékonyan lehet támogatni az összehasonlító geometriai kísérleteket.

FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Horváth J., A nemeuklideszi geometriák elemei a középiskolában I.-II., A Matematika Tanítása, 1980/6., 1981/2.
- [2] Horváth J., Sztereografikus projekció és alkalmazásai (Elemi geometria a Poincare-féle félgömbmodellen), A ELTE, 1980.
- [3] Kálmán A., Nemeuklideszi geometriák elemei, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2002.
- [4] Kortenkamp, U. H., Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrie in Cinderella, Institut für Theoretische Informatik Zürich, 1999.
- [5] Lénárt I., Jó szó, segítő szándék, <http://www.sulinet.hu/tart/fcikk/Kcn/0/11636/1>
- [6] Lénárt I., Sík és gömb. Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön, Munkalapok a síkgeometria és a gömbi geometria összehasonlításához. 1998.
- [7] Nagy-Kondor R., Dynamic geometry systems in teaching geometry, Teaching Mathematics and Computer Science, 2/1: 67-80., 2004.
- [8] Reiman I., Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó, 1999.
- [9] Richter-Gerbert, J., The interactive software Cinderella, Springer, 1999.
- [10] Szilassi L., Programismertető, http://www.c3.hu/events/99/mintakep/eloadasok/szilassi_lajos.

COMPARATIVE GEOMETRY

Comparative geometry aims at a multi-angle approach to mathematics. We also receive a more complete and accurate image of Euclidean geometry taught in school if we gain some insight into other systems of geometry.

The dynamic geometry programs provide an opportunity to make constructions also on a sphere (in simple elliptical geometry) and in the Poincare circle model (hyperbolic geometry).